▶ Teoria a pag. 784

3. IL CALCOLO CON I NUMERI COMPLESSI

L'addizione e la sottrazione

50 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo l'addizione e la sottrazione fra $4 + 3i$ e $-5 + 2i$.

Addizione

$(4 + 3i) + (-5 + 2i) =$

Sommiamo tra loro le parti reali e le parti immaginarie:

$= (4 - 5) + (3i + 2i) = -1 + 5i.$

Sottrazione

$(4 + 3i) - (-5 + 2i) =$

Trasformiamo la sottrazione in un'addizione, cambiando il segno del sottraendo:

$= (4 + 3i) + (5 - 2i) =$

Procediamo come nel caso dell'addizione:

$= (4 + 5) + (3i - 2i) = 9 + i.$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni fra numeri complessi.

51 $(4 + 2i) + (4 - 2i)$; $(6 - 3i) + (-6 + 3i)$; $(2 + 7i) + (-12i) + 7$.

52 $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right)$; $(-9 - i) + (2 + i) - (-5 + 2i)$.

53 $(2 - 3i) - \left(\frac{1}{7}i\right)$; $\frac{3}{4}i + \left(2 - \frac{1}{3}i\right)$; $\left(\frac{1}{2} - 6i\right) - \left(\frac{3}{2} + 6i\right) + 2i$.

54 $\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{2}{5} - \frac{5}{3}i\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{5}{3}i\right)$; $(-2i) - (-4 + 7i) - (-5i)$.

La moltiplicazione

55 **ESERCIZIO GUIDA**

Moltiplichiamo i seguenti numeri complessi:

a) $2 - 3i$ e $-6 + i$; b) $3 - 2i$ e $3 + 2i$.

a) $(2 - 3i)(-6 + i) =$
Utilizziamo la regola di moltiplicazione di due binomi (senza dimenticare che i è un numero e $i^2 = -1$):
$= -12 + 2i + 18i - 3i^2 = -12 + 20i + 3 = -9 + 20i.$

b) I numeri dati sono complessi coniugati. Il loro prodotto è un numero complesso reale:
$(3 - 2i)(3 + 2i) =$
Poiché $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:
$= 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13.$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra numeri complessi.

56 $(1 - i)(1 + i)$; $(2 - 3i)(2 + 3i)$.

57 $(2 - 5i)(1 + i)$; $(8 + 2i)(-4 - 2i)$.

58 $(6 + 3i)(6 + 2i)$; $(-7 + 2i)(7 + 2i)$.

59 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)(2 + 3i)$; $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}i\right)\left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{2}i\right)$.

La divisione

60 ESERCIZIO GUIDA

Eseguiamo la divisione fra i numeri complessi $2 + i$ e $1 - i$.

Scriviamo il quoziente sotto forma di frazione:

$$\frac{2+i}{1-i} =$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, ossia $1 + i$, ed eseguiamo i calcoli:

$$= \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2+2i+i+i^2}{1-i^2} = \frac{2+3i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2} =$$

Separiamo la parte reale dalla parte immaginaria. Il quoziente cercato è:

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Calcola i seguenti quozienti fra numeri complessi.

61 $(1 + i) : i$; $\quad 2 : i$; $\quad 1 : (3 - 2i)$.

62 $\frac{3+4i}{2i}$; $\quad \frac{-6-2i}{5i}$; $\quad \frac{8-3i}{2i}$.

63 $\frac{73}{8-3i}$; $\quad \frac{40}{4+2i}$; $\quad \frac{22i}{3-i}$.

64 $\frac{1-i}{2+i}$; $\quad \frac{2-i}{2+3i}$; $\quad \frac{3-i}{3+2i}$.

La potenza

Il quadrato

65 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo il quadrato di $-2 - i$.

$$(-2-i)^2 =$$

Applichiamo la regola del quadrato di un binomio $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$:

$$= 4 + i^2 + 4i =$$

Sostituiamo -1 a i^2:

$$= 4 - 1 + 4i = 3 + 4i.$$

Calcola il quadrato dei seguenti numeri complessi.

66 $1 + i$; $\quad 1 - i$; $\quad -1 + i$.

67 $1 + 2i$; $\quad 1 - 2i$; $\quad -1 + 2i$.

68 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\quad \frac{1}{4} - i$; $\quad -5 - \frac{1}{5}i$.

69 $2 - 3i$; $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\,i$; $\quad \frac{3}{2} - 2i$.

Il cubo

70 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il cubo di $5 - 2i$.

$(5 - 2i)^3 =$

Sviluppiamo il cubo del binomio, applicando la regola $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$:

$= 5^3 + 3 \cdot (5^2)(-2i) + 3 \cdot (5) \cdot (-2i)^2 + (-2i)^3 = 125 - 150i + 15 \cdot 4i^2 - 8i^3 =$

Teniamo presente che $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$= 125 - 150i - 60 + 8i = 65 - 142i.$

Calcola il cubo dei seguenti numeri complessi.

71 $1 + i; \quad 1 - i; \quad 2 + i.$

72 $2 + 3i; \quad 3 - 2i; \quad 1 - 5i.$

Espressioni con i numeri complessi

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

73 $3 + 2i - \frac{5}{4} - \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\right)i - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{16}{15}i$ $\left[\frac{1}{4} + 3i\right]$

74 $(3 + 2i)(3 - 2i) + (2 - 4i)3i - (6 + 2i)^2$ $[-(7 + 18i)]$

75 $\left[(2 - 3i) : \frac{13}{2 + 3i} - (4 + 3i)\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right)\right] : 12$ $[0]$

76 $\left(\frac{1 + 2i}{i - 1} + \frac{39i}{2 + 3i} - \frac{19}{2}\right) \cdot 2i + 6i$ $[-9 + 6i]$

77 $\frac{(2i^{28} - i^{45})^2}{2i^{41}}$ $\left[-2 - \frac{3}{2}i\right]$

78 $\frac{3 + i}{2 - i} - \frac{i - 2}{3 - i} + (i - 1)(i + 2) - i$ $\left[\frac{9i - 13}{10}\right]$

79 $(2 + 3i)(2 - 3i) - (3 + i)^2 + i(3 - 2i) - 6(i + 2)$ $[-5 - 9i]$

80 $\frac{9 + 7i}{2 + i} + \frac{-2i^4 + 3i^3 - 2i^2 + 3i}{3 - 2i}$ $[5 + i]$

81 $\frac{4i}{1 - 2i} + \frac{1 - i}{1 + 2i} + \frac{12}{5}$ $\left[\frac{3 + i}{5}\right]$

82 $\frac{1 - i}{1 - i^2} + \frac{1}{1 - i} + \frac{1 - 2i}{2i}$ $\left[-\frac{i}{2}\right]$

83 $\frac{1 + i}{(2 - i)^2} - \frac{i}{2 + i}$ $\left[\frac{-3i - 6}{25}\right]$

84 $\frac{3 - 4i}{i} \cdot (1 + i) - 2$ $[-7i - 3]$

85 $(1 - i)(3 - 2i) - \frac{i}{4 - 2i}$ $\left[\frac{11 - 52i}{10}\right]$

86 $(1 + i)^3 - \frac{(1 - i)^2}{i}$ $[2i]$

87 $\frac{1}{2 - i} + \frac{1 - i}{i(1 + i)}$ $\left[\frac{i - 3}{5}\right]$

88 $\left(\frac{1 - i}{2i - 1}\right)^2 + \frac{2i}{1 - 2i}$ $\left[\frac{16i - 12}{25}\right]$

89 $\frac{(2i)^2 - (1 + i)^2}{i(2 + 3i)} - i(2 - i)$ $\left[\frac{-5 - 12i}{13}\right]$

90 $\left(\frac{2 - i}{3 - 4i}\right)^3 + (1 - i)^2$ $\left[\frac{2 - 239i}{125}\right]$

91 $\frac{2i}{(2 - i)^2} - (1 - i)^2 - \frac{i(1 + i)}{2}$ $\left[\frac{9 + 87i}{50}\right]$

92 $\frac{1 - i^2}{1 + i^4} - \frac{i^5}{i(i - 1)} - 2i$ $\left[\frac{3 - 3i}{2}\right]$

93 $\dfrac{18i^{18}+7i^{6}}{(2i^{52}+i^{53})^2}:\dfrac{4i^{36}-2i^{20}}{(2i^{8}+i^{7}-i^{20})^2}$ $[4+3i]$

94 $\dfrac{3i^{10}}{(2-i^{21})^2}+\dfrac{\sqrt{2}\,i}{(3-i)^2}$ $\left[\dfrac{-18-3\sqrt{2}}{50}+\dfrac{2\sqrt{2}-12}{25}i\right]$

95 $(3-2i)(3+2i)+(1-3i)^2+(1-i)^3$ $[3-8i]$

96 $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\right)\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)+\dfrac{i(2-i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i)^2}-(1+2i)^3$ $\left[\dfrac{74+11i}{6}\right]$

97 $(1+i)^5+4i$ $[-4]$

98 $4\dfrac{2-i}{3+i}-i^{28}+\left[\dfrac{2i}{i-1}(4-i)-(2i+1)^2\right]\cdot 2i$ $[19+10i]$

99 $\dfrac{5(1+2i)(1-2i)}{(2i-1)^2}:\dfrac{9i^{24}i^{17}}{(3i^{14}+i^{47}-2i)^2}-\dfrac{5}{i-2}$ $[-4+9i]$

100 $\dfrac{3i}{2+i}-\dfrac{i-1}{2-i}-\dfrac{3(2-i)}{2i+1}+2(i-3)^2+(i+1)(1-i)-\dfrac{1}{5}$ $[19-8i]$

101 $6i^{12}+\dfrac{i^{15}+1}{3-i^{13}}-7i-\dfrac{4-2i}{i^{21}}+(2-3i)i^{11}-\dfrac{2-i}{5}$ $[5(1-i)]$

102 $\dfrac{1+2i}{3-2i}+\dfrac{1-i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{5}-\dfrac{i(i-1)}{13}$ $\left[-\dfrac{7}{65}i\right]$

103 $\dfrac{i(1+i)}{2-i}-\dfrac{3+2i}{1-2i}-(2-i)(2+3i)i$ $\left[\dfrac{18-42i}{5}\right]$

104 $(1+i)\left(\dfrac{2}{3+i}-\dfrac{1+i}{3-i}\right)+i(i+2)$ $\left[\dfrac{9}{5}i\right]$

---

105 **ASSOCIA** a ogni espressione il relativo risultato.

1) $(4-i)(3+2i)$	**a)** $\dfrac{i+1}{2}$
2) $\dfrac{i}{1+i}$	**b)** 0
3) $(-1-i)^2$	**c)** $14+5i$
4) $(i^4-1)(i+1)$	**d)** $2i$
5) i^8+i^{20}	**e)** 2

106 Dato il numero complesso $z=2+i$, determina $\bar{z}$, $|z|$, $\bar{z}+z$, $|\bar{z}|$. $[2-i, \sqrt{5}, 4, \sqrt{5}]$

107 Considera il numero complesso $z=3-4i$. Calcola $\bar{\bar{z}}$, $z\cdot\bar{z}$, $|\bar{z}|^2$, $|z+\bar{z}|$.
$[3-4i, 25, 25, 6]$

108 Trova per quali valori di k il prodotto
$(k+3+ki)\cdot(1-2ki)$
risulta un numero reale. $\left[0, -\dfrac{5}{2}\right]$

109 Calcola per quale valore di a il prodotto
$(a-2+3ai)\cdot(1-i)^2$
risulta un numero immaginario. $[0]$

110 Trova il coniugato del numero complesso z, essendo $z=\dfrac{2-3i}{1+i}$. $\left[-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}i\right]$

111 Considera $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$ e i loro coniugati $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
Dimostra che:
a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;
c) $\overline{z_1^{-1}} = (\overline{z_1})^{-1}$.

112 Dato $z = \dfrac{2i - 2}{(1 + \sqrt{3}\,i)(1 + i)}$, trova:
a) il suo modulo;
b) il suo coniugato;
c) il suo opposto.

$\left[\text{a) } 1;\ \text{b) } \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i;\ \text{c) } -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right]$

113 **TEST** Dati $z_1 = k + 1 + i(k - 1)$ e $z_2 = 2k - ki$, indica il valore di k per cui $\dfrac{z_1}{z_2}$ è un numero reale.

A $\dfrac{1}{3}$.
B -3.
C 0 e -3.
D 0 e $\dfrac{1}{3}$.
E $\forall k \neq 0$.

114 **TEST** Il prodotto $(x - 2i)(1 - x + xi)$ è un numero immaginario per x uguale a:

A $-3, 0$.
B $-1 \pm \sqrt{3}$.
C $0, 3$.
D 3.
E 0.

115 Dato il numero complesso $z = 2 - 2i$, calcola $|z|$, z^2, z^3, $(\overline{z})^3 - z \cdot z^2$.

$[2\sqrt{2}, -8i, -16 - 16i, 32i]$

116 **VERO O FALSO?** Dato il numero complesso z, si ha:

a) $\overline{\overline{z}} = z$. V F
b) $|z \cdot \overline{z}| = |z| \cdot |\overline{z}|$. V F
c) $\dfrac{|z|}{|\overline{z}|} = 1$. V F
d) $3\overline{z} = \overline{3z}$. V F
e) $z^2 = (\overline{z})^2$. V F

117 Dato il numero $z = a + 2 - 2i$, trova a in modo che:
a) z^2 sia un numero reale;
b) $\overline{z}^2$ sia un numero immaginario;
c) $z \cdot \overline{z} = 13$.

[a) -2; b) $0, -4$; c) $1; -5$]

4. LA RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

▶ Teoria a pag. 786

Il piano di Gauss

Rappresenta nel piano di Gauss i seguenti numeri complessi.

118 $-1 - i$; $2i$; -4; $4 + i$.

119 $6i$; $1 + i$; $\dfrac{1}{2} - i$; $1 - 3i$.

120 Dati i seguenti punti nel piano di Gauss, scrivi i numeri complessi a essi associati.

$A(1; 0)$, $B(-2; -4)$, $C(0; -3)$, $D\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $E(2; -5)$, $F\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

121 Dati i seguenti numeri complessi, determina i loro coniugati e rappresenta entrambi nel piano di Gauss. Cosa noti?

$3 + i$, $-2 - i$, $-4 + 2i$, $1 - 3i$.

122 Come nell'esercizio precedente, ma considerando gli opposti dei numeri complessi.

$2 - 5i$, $-3 - 2i$, $4 + i$, $-1 + 3i$.

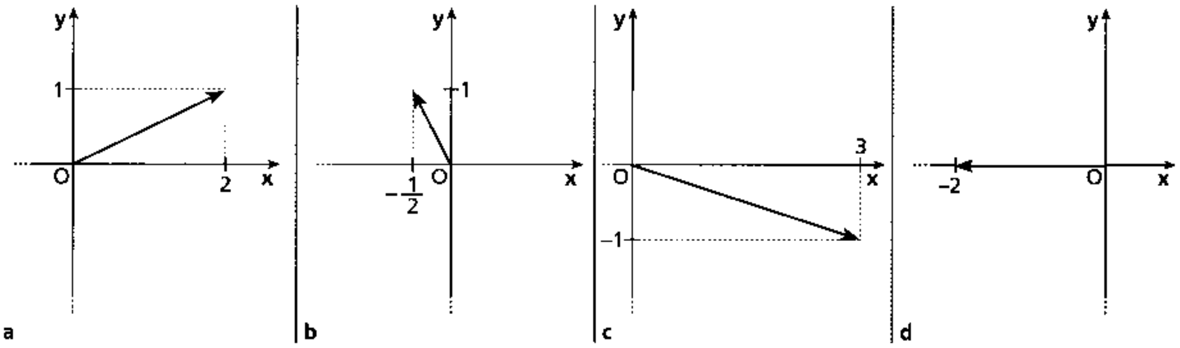
I vettori e i numeri complessi

Rappresenta il vettore associato a ogni numero complesso.

123 $2 - i$; $\quad i$; $\quad 4 + 2i$; $\quad 3$.

124 $2i$; $\quad \frac{1}{2} + 4i$; $\quad \frac{1+i}{3}$; $\quad 6 - 2i$.

125 Determina il numero complesso associato a ogni vettore.



126 Considera i numeri complessi $6 + i$ e $-1 + 5i$. Rappresenta i vettori associati, determina la loro somma con la regola del parallelogramma e verifica che il vettore ottenuto è associato alla somma dei numeri dati.

127 Il vettore corrispondente al numero complesso opposto di $a + bi$ è opposto al vettore individuato da $a + bi$. Verificalo.

128 Disegna nel piano cartesiano i vettori aventi per componenti le seguenti coppie di numeri.

$(1; -2)$, $\quad (2; 5)$, $\quad (3; -1)$, $\quad (-4; -6)$, $\quad (7; 1)$.

Le coordinate polari

129 Individua nei vettori dell'esercizio precedente il modulo e l'argomento.

Dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane

130 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo le coordinate polari del punto $P\left(4; \frac{\pi}{4}\right)$ in coordinate cartesiane.

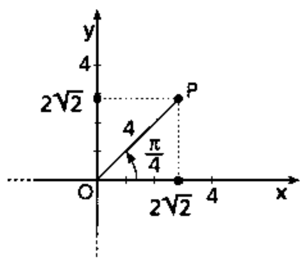
Le formule di trasformazione in coordinate cartesiane sono:

$$\begin{cases} x_P = r\cos\alpha \\ y_P = r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Pertanto

$$x_P = 4\cos\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$y_P = 4\,\text{sen}\frac{\pi}{4} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$



Il punto P ha coordinate cartesiane $(2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2})$.

Trasforma in coordinate cartesiane le coordinate polari dei seguenti punti.

131 $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(1;\frac{2}{3}\pi\right)$, $D\left(4;\frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(2;\frac{11}{6}\pi\right)$.

132 $P\left(6;\frac{5}{6}\pi\right)$, $Q\left(1;\frac{3}{2}\pi\right)$, $R\left(\frac{1}{2};2\pi\right)$, $S\left(\frac{1}{4};\pi\right)$, $T\left(3;\frac{4}{3}\pi\right)$.

Dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari

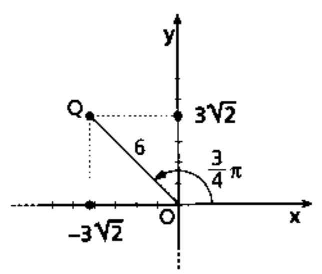
133 **ESERCIZIO GUIDA**

Trasformiamo in coordinate polari le coordinate cartesiane del punto $Q(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$.

Le formule di trasformazione sono:

$$r = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_Q}{x_Q}.$$



Calcoliamo r:

$$r = \sqrt{(-3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = \sqrt{36} = 6.$$

Calcoliamo α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{-3\sqrt{2}} = -1, \text{ da ciò } \alpha = \frac{3}{4}\pi + k\pi.$$

Poiché ci troviamo nel secondo quadrante, scegliamo:

$$\alpha = \frac{3}{4}\pi.$$

La trasformazione richiesta è la seguente:

coordinate cartesiane		coordinate polari
$Q(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$	$\rightarrow$	$Q\left(6;\frac{3}{4}\pi\right)$.

Trasforma in coordinate polari le coordinate cartesiane dei seguenti punti.

134 $A(4\sqrt{3};4)$, $B(0;2)$, $C(5\sqrt{2};5\sqrt{2})$, $D\left(\frac{1}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $E\left(-\frac{1}{4};0\right)$.

$\left[A\left(8;\frac{\pi}{6}\right), B\left(2;\frac{\pi}{2}\right), C\left(10;\frac{\pi}{4}\right), D\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right), E\left(\frac{1}{4};\pi\right)\right]$

135 $A\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, $C\left(\frac{5\sqrt{3}}{2};-\frac{5}{2}\right)$.

$\left[A\left(3;\frac{5}{6}\pi\right), B\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\pi\right), C\left(5;\frac{11}{6}\pi\right)\right]$

Dato il seguente numero complesso, rappresenta il corrispondente vettore $\overrightarrow{OP}$ e determina le coordinate polari di P.

136 $4-4i$

137 $5i$

138 $-2+2\sqrt{3}\,i$

139 $1+\frac{5}{2}i$

140 2

141 $-\sqrt{3}-i$

Determina modulo e argomento dei seguenti numeri complessi.

142 $5-5i$; $6i$; -8; 3π. $\left[5\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi; 6, \frac{\pi}{2}; 8, \pi; 3\pi, 0\right]$

143 $1-\sqrt{3}\,i$; $2\sqrt{3}-2i$; $-5i$; 2. $\left[2, \frac{5}{3}\pi; 4, \frac{11}{6}\pi; 5, \frac{3\pi}{2}; 2, 0\right]$

5. LA FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Teoria a pag. 790

144 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo $1-i$ in forma trigonometrica.

Dobbiamo scrivere $1-i$ nella forma $r\cos\alpha + i\,r\,\mathrm{sen}\,\alpha$.

Calcoliamo $r=\sqrt{a^2+b^2}$:

$$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Calcoliamo α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{b}{a}=\frac{-1}{1}=-1 \rightarrow \alpha_1=\frac{5}{4}\pi \vee \alpha_2=\frac{7}{4}\pi.$$

Scegliamo $\alpha=\frac{7}{4}\pi$ perché il punto corrispondente al numero complesso si trova nel quarto quadrante.

La forma trigonometrica di $1-i$ è quindi:

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right).$$

Scrivi i seguenti numeri complessi in forma trigonometrica.

145 $6\sqrt{2}+6\sqrt{2}\,i$; $-2i$. $\left[12\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right); 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right)\right]$

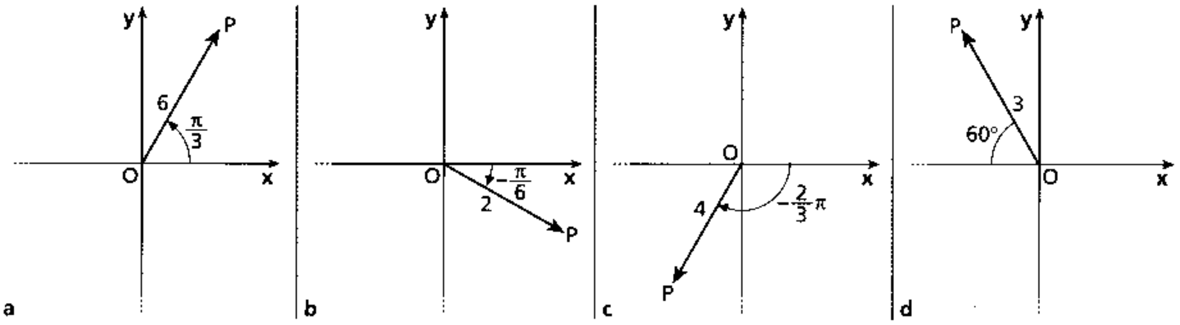
146 $\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}i$; $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\,i$. $\left[\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right); 4\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)\right]$

147 $-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\left[\frac{1}{4}(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi); \cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right]$

148 $-\sqrt{3}-i$; $-\sqrt{3}$. $\left[2\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right); \sqrt{3}\,(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)\right]$

149 $2-2\sqrt{3}\,i$; 1. $\left[4\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right); \cos 0+i\,\mathrm{sen}\,0\right]$

150 Scrivi in forma trigonometrica i numeri complessi individuati dai vettori delle figure.



Esprimi in forma algebrica i seguenti numeri complessi.

151 $\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$; $\quad 2\left(\cos\frac{3}{4}\pi - i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$. $\left[-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i\right]$

152 $8(\cos\pi - i\,\text{sen}\,\pi)$; $\quad 4\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right)$. $[-8; -2\sqrt{3} - 2i]$

153 $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{13}{4}\pi\right)$; $\quad \cos\frac{7}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{2}\pi$. $[-2 - 2i; -i]$

154 $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{8}{3}\pi - i\,\text{sen}\,\frac{8}{3}\pi\right)$; $\quad 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i; -6 - 6i\right]$

6. OPERAZIONI FRA NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

▶ Teoria a pag. 791

La moltiplicazione

155 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il prodotto dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right) \text{ e } z_2 = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right).$$

Ricordiamo che, se $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$, il loro prodotto è

$$z_1 z_2 = rs[\cos(\alpha + \beta) + i\,\text{sen}\,(\alpha + \beta)],$$

quindi, essendo $r = \frac{1}{2}$, $s = \frac{2}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{5}{6}\pi$, si ha:

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi\right).$$

Poiché $\cos\frac{3}{2}\pi = 0$ e $\text{sen}\,\frac{3}{2}\pi = -1$, sostituendo:

$$z_1 z_2 = \frac{1}{3}[0 + i(-1)] = -\frac{1}{3}i.$$

Calcola il prodotto dei seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica.

156 $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$. $[z_1 z_2 = i]$

157 $z_1 = \frac{4}{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$. $\left[z_1 z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}i\right]$

158 $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)$. $\left[z_1 z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}i\right]$

159 $z_1 = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$, $\quad z_2 = 2\left(\cos\frac{11}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{4}\pi\right)$. $[z_1 z_2 = -2i]$

160 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{11}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$. $\left[z_1 z_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\,\frac{3 - \sqrt{3}}{4}\right]$

161 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)$, $\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right)$. $\left[z_1 z_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\,\frac{-3 + \sqrt{3}}{4}\right]$

162 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, $\quad z_3 = \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$.

$\left[z_1 z_2 z_3 = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5}i\right]$

Calcola i seguenti prodotti sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica e verifica l'uguaglianza dei risultati.

163 $(1+i)(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i)$; $\quad i(2-2i)$. $\quad [2\sqrt{3}; 2+2i]$

164 $(8-8i)(-3+3i)$; $\quad 2i(1+\sqrt{3}\,i)$. $\quad [48i; -2\sqrt{3}+2i]$

165 $(4+4i)(-3-3i)$; $\quad 6i(1+i)$. $\quad [-24i; -6+6i]$

166 $(\sqrt{3}-i)(1+\sqrt{3}\,i)$; $\quad (1-i)(\sqrt{3}-i)$. $\quad [2\sqrt{3}+2i; (\sqrt{3}-1)+i(-1-\sqrt{3})]$

La divisione

167 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il quoziente dei seguenti numeri complessi e scriviamo il risultato in forma algebrica:

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi\right) \text{ e } z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right).$$

Se $z_1 = r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e $z_2 = s(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$, il loro quoziente è:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)].$$

In questo modo otteniamo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{2}\left[\cos\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi\right).$$

Per scrivere la soluzione in forma algebrica ricordiamo che $\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quindi:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i.$$

Calcola il quoziente fra i seguenti numeri complessi e scrivi il risultato in forma algebrica.

168 $z_1 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi$, $\quad z_2 = \cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = -1\right]$

169 $z_1 = \cos\frac{7}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{6}\pi$, $\quad z_2 = \cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{6}\pi$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right]$

170 $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} - i\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right]$

171 $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{11}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = -1+\sqrt{3} - (1+\sqrt{3})i\right]$

172 $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, $\quad z_2 = \cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{4}\pi$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i\right]$

173 $z_1 = (\sqrt{3}+1)\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{7}{6}\pi\right)$, $\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\frac{5}{4}\pi\right)$. $\quad \left[\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} - i\frac{1}{4}\right]$

Calcola, utilizzando la forma trigonometrica, il reciproco di ognuno dei seguenti numeri complessi.

174 $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$; $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. $\quad [\sqrt{3}-i; 1-i]$

175 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; $\quad -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. $\quad \left[-1+i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right]$

176 $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\quad \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}i$. $\quad \left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i; \frac{\sqrt{3}}{3}+i\right]$

177 $2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\,i$; $\quad -1+\sqrt{3}\,i$. $\quad \left[\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{8}i; -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right]$

Calcola i seguenti quozienti sia in forma algebrica sia in forma trigonometrica e verifica l'uguaglianza dei risultati.

178 $\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$; $\quad \frac{4-4i}{6+6i}$. $\quad \left[-i; -\frac{2}{3}i\right]$

179 $\frac{5+5i}{2i}$; $\quad \frac{-8i}{1-\sqrt{3}\,i}$. $\quad \left[\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i; 2\sqrt{3}-2i\right]$

180 $\frac{\sqrt{3}-3i}{3+\sqrt{3}\,i}$; $\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i}{1+i}$. $\quad [-i; -\sqrt{2}\,i]$

La potenza con esponente intero positivo

181 ESERCIZIO GUIDA

Calcoliamo

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5$$

ed esprimiamo il risultato ottenuto in forma algebrica.

Se $z=r(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, possiamo applicare la formula di De Moivre:

$$[r(\cos\alpha+i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^n=r^n(\cos n\alpha+i\,\mathrm{sen}\,n\alpha).$$

Nel nostro caso è $n=5$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{2}{3}\pi\right)\right]^5=2^5\left[\cos\left(5\frac{2}{3}\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(5\frac{2}{3}\pi\right)\right]=32\left(\cos\frac{10}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{10}{3}\pi\right)=$$

essendo $\frac{10}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi+\frac{6}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi+2\pi$:

$$=32\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi\right).$$

$\cos\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, pertanto la forma algebrica del risultato ottenuto è:

$$32\left[-\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=-\frac{32}{2}-\frac{32\sqrt{3}}{2}i=-16-16\sqrt{3}\,i.$$

Calcola le seguenti potenze di numeri complessi ed esprimi il risultato in forma algebrica.

182 $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^6$ $\quad \left[-\frac{1}{64}i\right]$

183 $\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)\right]^4$ $\quad \left[\frac{16}{25}i\right]$

184 $\left[\sqrt[12]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}\right)\right]^6$ $\quad [-\sqrt{3}]$

185 $\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi\right)\right]^3$ $\quad \left[\frac{1}{8}\right]$

186 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{9}\right)\right]^3$ $\quad [4+4\sqrt{3}\,i]$

187 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{10}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{10}\right)\right]^5$ $\quad [32i]$

188 $\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{4}{3}\pi\right)^6$ $\quad [1]$

189 $\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\,\mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi\right)^4$ $\quad [-1]$

Calcola le seguenti potenze di numeri complessi in forma algebrica, dopo averli trasformati in forma trigonometrica.

190 $(\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i)^4$ $[-16]$

191 $(-2 - 2\sqrt{3}\,i)^3$ $[64]$

192 $\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$ $[3\sqrt{3}\,i]$

193 $(\sqrt{3} + i)^4$ $[-8 + 8\sqrt{3}\,i]$

194 $\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^4$ $\left[-\frac{81}{2} + \frac{81\sqrt{3}}{2}i\right]$

195 $[(\sqrt{2} - \sqrt{6}) + (-\sqrt{2} - \sqrt{6})i]^{12}$ $[-4^{12}]$

La potenza con esponente intero negativo

196 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3},$$

esprimendo il risultato in forma algebrica.

Sappiamo che, se $z = r(\cos\alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$, allora $[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha)$, quindi:

$$\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-3} = \frac{1}{2^3}\left[\cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) - i\,\text{sen}\left(3\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right).$$

In forma algebrica il risultato è:

$$\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}[0 - i(1)] = -\frac{1}{8}i.$$

Calcola le seguenti potenze e scrivi il risultato in forma algebrica.

197 $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right)\right]^{-4}$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

198 $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)\right]^{-3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$

199 $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right)\right]^{-3}$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{9}i\right]$

200 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-4}$ $\left[-\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i\right]$

201 $\left[\frac{1}{3}\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{3}\pi\right)\right]^{-6}$ $[3^6]$

202 $\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{5}{12}\pi\right)\right]^{-12}$ $[-8^6]$

RIEPILOGO Le espressioni con i numeri complessi in forma trigonometrica

Calcola il valore delle espressioni utilizzando i numeri z_1 e z_2 assegnati a fianco. Scrivi il risultato in forma algebrica.

203 $z_1^2 + z_2$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \cos\frac{4}{3}\pi + i\,\text{sen}\,\frac{4}{3}\pi$. $[-1]$

204 $z_1 - z_2^3$; $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$. $[2 + i]$

205 $z_1^3 + z_2^2$; $z_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}$. $[2i]$

206 $z_1^4 + z_2^2;\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12},\quad z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right).$ $[5 + 5\sqrt{3}i]$

207 $z_1^3 + z_2^2;\quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right),\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right).$ $[-2 + 6i]$

208 $z_1^3 + z_2^2;\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right),\quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right).$ $[0]$

209 $z_1^6 + z_2^3;\quad z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{12}\pi\right),\quad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right).$ $[2(256 + \sqrt{2})i]$

210 $z_1^2 + \frac{1}{z_2};\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3},\quad z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{3}\pi.$ $[i\sqrt{3}]$

211 $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2};\quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right),\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right).$ $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2i\right]$

212 $z_1^2 - \frac{1}{z_2^2};\quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right),\quad z_2 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}.$ $[2 + i(1 + 2\sqrt{3})]$

213 $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2};\quad z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right),\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{23}{12}\pi\right).$ $[2(3 + 2\sqrt{3})]$

214 $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2};\quad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi\right),\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right).$ $\left[-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}-1}{2}i\right]$

215 $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^3};\quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{4}\pi\right),\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{6}\pi\right).$ $\left[\frac{-\sqrt{3}+72}{9}i\right]$

216 $z_1^6 + \frac{1}{z_2^3};\quad z_1 = \cos\frac{5}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{12}\pi,\quad z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7}{6}\pi\right).$ $\left[\frac{9+\sqrt{3}}{9}i\right]$

217 $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2};\quad z_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11}{12}\pi\right),\quad z_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13}{12}\pi\right).$ $[2(-3 + 2\sqrt{3})]$

218 $z_1^2 z_2^4 - z_1^4;\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4},\quad z_2 = \cos\frac{5}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5}{4}\pi.$ $[1 - i]$

Semplifica le seguenti espressioni.

219 $\frac{1}{16}(1+i)^6(\sqrt{3}+i)^4$ $[4(i + \sqrt{3})]$

220 $\frac{8}{9}\sqrt{3}\,\frac{(-\sqrt{3}-i)^4}{(-1+i)^3}$ $\left[\frac{16}{9}[i(3+\sqrt{3}) + 3 - \sqrt{3}]\right]$

221 $(-1-i)^{10} : (\sqrt{3}-i)^5$ $\left[\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right]$

222 $(1-i)^6 \cdot (2+2i)^4$ $[-512i]$

223 $\frac{(1+i)^4 \cdot (\sqrt{3}-i)^3}{(1+i\sqrt{3})^8}\,i$ $\left[\frac{1}{16}(1 + i\sqrt{3})\right]$

224 $\frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4(1+i)^8}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6} + (2i)^8$ $[240]$